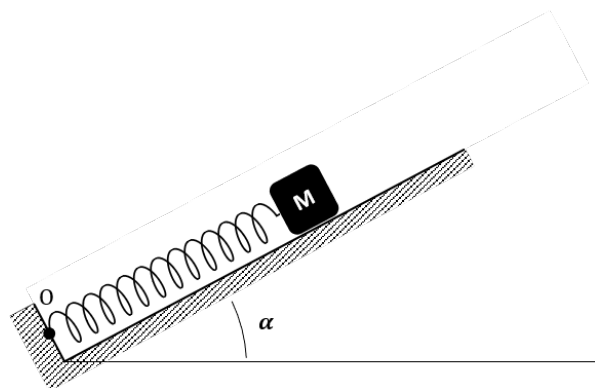


Exercice n°1 • Masse ressort sur un plan incliné

cours

Soit un ressort de masse nulle, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 attaché à un support fixe à l'une de ses extrémités. À l'autre extrémité, on accroche une masse m , assimilée à un point matériel M , libre de se déplacer sans frottement sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontal.

À l'instant initial, la masse est lâchée sans vitesse initiale et le ressort possède une longueur x_0 .

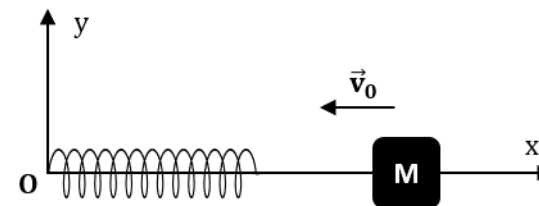


- 1) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
- 2) Déterminer l'expression de la pulsation des oscillations et de la longueur du ressort lorsque la masse est à sa position d'équilibre.
- 3) Donner la solution complète de l'équation différentielle.
- 4) Reprendre les question précédente en considérant une force de frottement fluide $\vec{f} = -b\vec{v}$ (avec b une constante). On suppose que b est suffisamment petit pour pouvoir observer des oscillations.
- 5) Effectuer un bilan de puissance. Le commenter.

Exercice n°2 • Masse ressort à l'horizontale

☆☆☆

Soit un ressort de masse nulle, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 attaché à un support fixe à l'une de ses extrémités. L'autre extrémité est libre. Une masse m , assimilée à un point matériel M , se déplacer sans frottement à la vitesse constante $\vec{v}_0 = -v_0 \vec{u}_x$ en direction du ressort. On note $t = 0$ le temps où la masse entre en contact avec le ressort.



- 1) Établir l'équation différentielle vérifiée par la position du point M , tant que la masse est en contact avec le ressort.
- 2) Préciser les conditions initiales : $x(0^+)$ et $\dot{x}(0^+)$.
- 3) Résoudre l'équation différentielle avec les conditions initiales déterminées précédemment.
- 4) Quelle est la longueur minimale du ressort au cours de l'expérience ? Commenter l'expression obtenue.
- 5) Tracer la fonction $v_x(t)$, projection du vecteur vitesse sur l'axe (Ox) en fonction du temps (inclure les temps négatifs).

Exercice n°3 • Masse ressort à la verticale

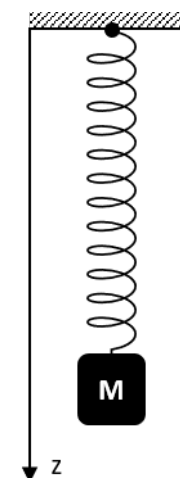
☆☆☆

On suspend à un ressort vertical un point matériel de masse m . On note k la constante de raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide.

- 1) Faire 3 schémas clairs des situations suivantes.
 - Cas du ressort sans la masse. On note ℓ_0 la longueur du ressort.
 - Cas du ressort avec la masse sur sa position d'équilibre. On note ℓ_{eq} la longueur du ressort.
 - Cas du ressort avec la masse ayant une position quelconque $z(t)$. On note $\ell(t)$ la longueur du ressort.

Dans la suite on prendra comme origine de l'axe vertical, la position de la masse à l'équilibre.

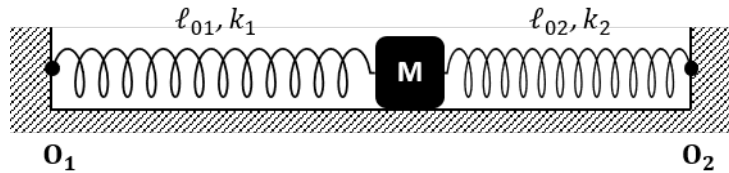
- 2) Quelle relation existe-t-il entre $\ell(t)$ et $z(t)$?
- 3) Appliquer le PFD lorsque la masse est immobile sur sa position d'équilibre. En déduire une relation entre ℓ_{eq} et les autres données du problème.
- 4) Appliquer le PFD pour une position quelconque et déterminer l'équation différentielle du mouvement.



Exercice n°4 • Deux ressorts en dérivation



On considère deux ressorts de longueur à vide ℓ_{01} et ℓ_{02} , et de constante de raideur k_1 et k_2 . Une masse supposée ponctuelle est fixée de la manière indiquée sur le schéma ci-dessous.



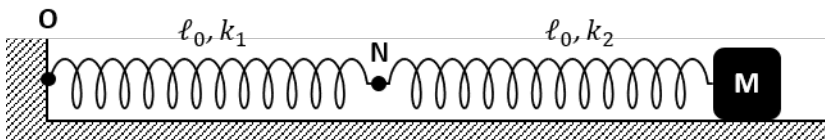
On note $a = O_1O_2$ la distance entre O_1 et O_2 . L'origine de l'axe horizontal est prise à la position d'équilibre du système. On note $x(t)$ la position du point M .

- 1) Déterminer une relation reliant les longueurs à vide ℓ_0 , les longueurs à l'équilibre ℓ_{eq} et les constantes de raideur k des deux ressorts.
- 2) Déterminer pour chaque ressort une relation reliant $x(t)$, sa longueur à un instant quelconque $\ell(t)$ et sa longueur à l'équilibre ℓ_{eq} .
- 3) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, la position du point M . La mettre sous forme canonique. Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 des oscillations.
- 4) Dans l'analogie électrocinétique, quel dipôle est l'analogue du ressort ? Les ressorts étant ici en dérivation, est-ce surprenant d'avoir trouvé cette expression de ω_0 à la question précédente ?

Exercice n°5 • Deux ressorts en série



On considère deux ressorts, de même longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur respective k_1 et k_2 , mis bout à bout. Une masse ponctuelle M , de masse m et d'abscisse $x(t)$, est accrochée à l'extrémité du deuxième ressort. On note N , de masse nulle et d'abscisse $x_N(t)$, le point de jonction entre les deux ressorts. L'origine de l'axe horizontal est prise au point O .

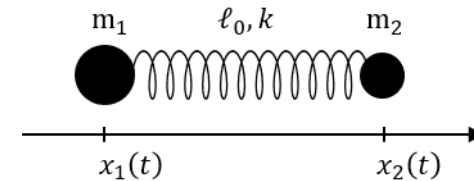


- 1) Déterminer les relations entre $\ell_1(t)$, $\ell_2(t)$, $x(t)$ et $x_N(t)$.
- 2) Appliquer le PFD au point N . En déduire l'expression de $\ell_2(t)$ en fonction de $x(t)$ et les constantes du problème.
- 3) Appliquer le PFD au point M . En déduire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ et la mettre sous forme canonique.
- 4) L'équation précédente est-elle cohérente avec l'analogie électromécanique ?

Exercice n°6 • Molécule diatomique



On peut modéliser une molécule diatomique, par exemple H_2 ou CO , comme deux atomes reliés par un ressort. Le système est schématisé ci-dessous. Chaque atome est représenté par une masse différente. On notera k la constante de raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. On négligera la gravité.



On note μ la masse réduite du système, définie par :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

On note également : $u(t) = x_2(t) - x_1(t)$.

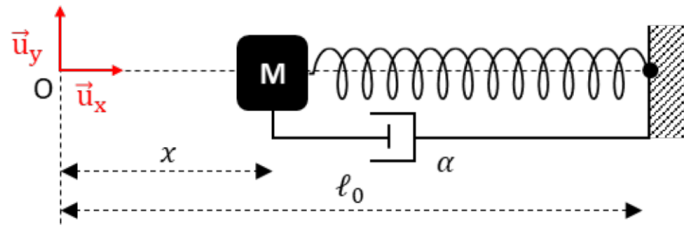
On suppose qu'à l'instant initial deux atomes sont immobiles et séparés par une distance d . L'origine de l'axe (Ox) est pris sur la masse m_1 en $t = 0$.

- 1) Déterminer l'équation du mouvement de la masse m_1 . Cette équation peut faire apparaître $x_1(t)$ et ses dérivées, ainsi que $x_2(t)$.
- 2) De la même manière, trouver l'équation du mouvement de la masse m_2 .
- 3) En combinant les deux équations du mouvement précédentes, donner l'ED vérifiée par $u(t)$. Déterminer la solution de cette équation.
- 4) En déduire les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Exercice n°7 • Modélisation d'un haut-parleur



On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur comme une masse m , se déplaçant horizontalement le long d'un axe (Ox) .



Cette masse est reliée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k et subit une force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.

Elle est par ailleurs soumise à une force $\vec{F}(t)$ imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur, qui vaut :

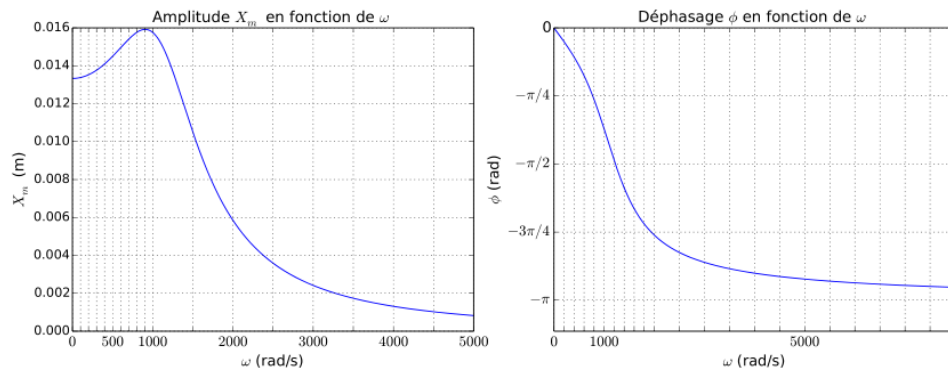
$$\vec{F}(t) = K i(t) \vec{u}_x$$

où K est une constante.

On travaille dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On suppose que le courant est de la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.

Données : $m = 10 \text{ g}$, $K = 200 \text{ N} \cdot \text{A}^{-1}$ et $I_m = 1 \text{ A}$.

- 1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, la position de la masse m .
 - 2) La mettre sous forme canonique et identifier les expressions de ω_0 (pulsation propre) et Q (facteur de qualité).
 - 3) Justifier que la réponse s'écrit sous la forme : $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$.
 - 4) On note : $\underline{X}_m(\omega) = X_m e^{j\phi}$ l'amplitude complexe de la réponse forcée complexe $x(t)$. Déterminer l'expression de $\underline{X}_m(\omega)$.
 - 5) Déterminer les limites de $\underline{X}_m(\omega)$ en BF et HF.
 - 6) Existe-t-il toujours une résonance ?
- On a tracé ci-dessous les courbes de $X_m(\omega)$ et de $\phi(\omega)$.



7) Pour quelle pulsation le déplacement est-il en quadrature de phase avec la force excitatrice ? Déterminer alors graphiquement la pulsation propre.

Exercice n°8 • Le bleu du ciel



Pour décrire les interactions entre une onde lumineuse caractérisée par le vecteur champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ (avec $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_x$) et les électrons de la couche externe d'un atome, on utilise le modèle de l'électron élastiquement lié dû à Thomson.

On admet que la force due au champ électrique subie par une particule de charge q vaut $\vec{F}_q = q \vec{E}$, que l'électron est rappelé vers le centre O de l'atome par une force de rappel $\vec{F}_{el} = -k \vec{OM}$ et qu'il est freiné par une force proportionnelle à sa vitesse $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$.

On pose :

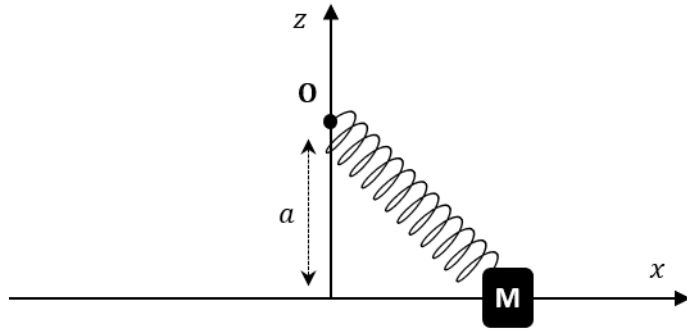
$$X_0 = \frac{eE_0}{m\omega_0^2}$$

- 1) Établir l'équation différentielle régissant son mouvement. On précisera le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur ainsi constitué.
 - 2) Démontrer qu'en régime permanent, l'électron oscille parallèlement à $\vec{E}_0$.
 - 3) Établir l'expression de l'amplitude complexe de l'accélération $\underline{A}_m$ de l'électron.
- Cet atome est éclairé par de la lumière blanche composée d'ondes dont les pulsations sont comprises entre ω_r (rouge) et ω_b (bleu). On admet que $\omega_r < \omega_b \ll \omega_0$ et que $Q \gg 1$.
- 4) Montrer que dans ces conditions $\underline{A}_m$ est proportionnelle à ω^2 .
 - 5) En admettant qu'une charge oscillant à une fréquence ω rayonne une onde lumineuse de pulsation ω dont la puissance lumineuse $\mathcal{P}_{ray}$ est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'accélération, expliquer pourquoi le ciel paraît bleu.

Exercice n°9 • Masse guidée par une tige horizontale



On considère la situation ci-dessous, où une masse m reliée à un ressort (k , ℓ_0) est contrainte de se déplacer sur une tige horizontale située à une distance a du point d'accroche du ressort.



1) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

2) Si $a > \ell_0$, montrer qu'il existe une position d'équilibre x_0 (on admet qu'il s'agit d'un équilibre stable). Si $a < \ell_0$, montrer qu'il existe trois positions d'équilibres x_0 (on admet qu'il s'agit d'un équilibre instable), x_+ et x_- (on admet qu'il s'agit de deux équilibres stables).

On considère à présent que la masse fait des petites oscillations autour d'une position d'équilibre. Mathématiquement : $x(t) = x_{eq} + \varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t)$ un infiniment petit d'ordre 1.

3) Pour chaque position d'équilibre stable, montrer que l'équation différentielle se simplifie en une équation différentielle d'oscillateur harmonique. Déterminer alors la pulsation propre des oscillations.

Éléments de correction

- ❶ 1) $\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \ell_{eq}$. 2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k} \sin(\alpha)$. 3) $x(t) = (x_0 - \ell_{eq}) \cos(\omega_0 t) + \ell_{eq}$. 4) $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \ell_{eq}$ et $x(t) = (x_0 - \ell_{eq}) e^{-\lambda t} \left[\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega} \sin(\Omega t) \right] + \ell_{eq}$. 5) $\frac{d}{dt} (\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,el} + \mathcal{E}_{p,p}) = -b \dot{x}$ ❷
- 1) $\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \ell_0$ avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. 2) $x(0^+) = \ell_0$ et $\dot{x}(0^+) = -v_0$. 3) $x(t) = \ell_0 - \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$. 4) $\ell_{min} = \ell_0 - \frac{v_0}{\omega_0}$, peut être < 0 ? ❸ 2) $\ell(t) = \ell_{eq} + z(t)$. 3) $\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$. 4) $\ddot{z} + \omega_0^2 z(t) = 0$. ❹ 1) $0 = -k_1 (\ell_{1,eq} - \ell_{01}) + k_2 (\ell_{2,eq} - \ell_{02})$. 2) $\ell_1(t) = \ell_{1,eq} + x(t)$ et $\ell_2(t) = \ell_{2,eq} - x(t)$.
- 3) $\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = 0$ avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$. 4) $k_{eq} = k_1 + k_2$. ❺ 1) $x_N(t) = \ell_1(t)$

- et $x(t) = \ell_1(t) + \ell_2(t)$. 2) $\ell_2(t) = \frac{k_1}{k_1 + k_2} x(t) + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \ell_0$. 3) $\ddot{x} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \cdot 2\ell_0$ avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$ et $k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$. 4) Condensateurs en série : $C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$. ❻ 1) $m_1 \ddot{x}_1 = k(x_2(t) - x_1(t) - \ell_0)$. 2) $m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2(t) - x_1(t) - \ell_0)$. 3) $\ddot{u} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 \ell_0$ avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$. Donc : $u(t) = (d - \ell_0) \cos(\omega_0 t) + \ell_0$. 4) $x_1(t) = \frac{\mu}{m_1} (d - \ell_0) (1 - \cos(\omega_0 t))$ et $x_2(t) = d - \frac{\mu}{m_2} (d - \ell_0) (1 - \cos(\omega_0 t))$. ❼ 1) $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x(t) = \frac{K}{m} i(t)$. 2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$. 3) RSF. 4) $\underline{X}_m = \frac{K I_m / m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega}$. 5) $X_m(0) = \frac{K I_m}{m \omega_0^2}$ et $X_m(\infty) = 0$. 6) Si $Q > 1/\sqrt{2}$, $\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. 7) $\omega_0 = 1200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. ❸
- 1) $\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d \overrightarrow{OM}}{dt} + \omega_0^2 \overrightarrow{OM} = -\omega_0^2 X_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$ avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$. 2) Oui en RSF. 3) $\underline{A}_m = \frac{X_0 \omega^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j\omega}{Q\omega_0}}$. 4) $\underline{A}_m \simeq X_0 \omega^2$. 5) $\frac{\mathcal{P}_{ray,b}}{\mathcal{P}_{ray,r}} \simeq$
8. ❾ 1) $m\ddot{x} = -kx \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$. 2) $x_0 = 0$ et $x_{\pm} = \pm \sqrt{\ell_0^2 - a^2}$. 3) Si $a > \ell_0$: $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right)$. Si $a < \ell_0$: $\omega_1^2 = \frac{k}{m} \left(1 - \left(\frac{a}{\ell_0}\right)^2\right)$.